工程數學 Midterm #2 Dec, 14 2021

~~1. 請使用 Cauchy-Euler 法，求下列變係數 ODE 之**特解 (求出 C₁, C₂)** (配分 10 分)~~

（本題刪除）

2. 請使用 Cauchy-Euler 法，求下列變係數 ODE 之**通解(不用求出 C_1, C_2)** (配分 10 分)

   $x^2y'' + 2xy' - 2y = 6x$

3. 求 L\{f(t)\} (配分 15 分, 每小題 5 分)

   (1): $\mathrm{L}\{\, e^t \sin 3\mathrm{t} \,\}$ (2): $\mathrm{L}\{\, \mathrm{t}\ e^{-6t} \,\}$ (3): $\mathrm{L}\{\, 1 + \cosh 5t\}$

4. 求逆轉換: (配分 15 分，每小題 5 分)

   $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 6s + 10}\right\}$ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\}$

5. 使用 Laplace 轉換，求解 ODE (配分 10 分)

   $y'' + 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1 \;\; y'(0) = 1$

6. 使用 Laplace 轉換，求解 ODE (配分 10 分)

   $y'' - 4y' + 4y - t^3e^{2t} = 0, \;\; y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

7. Laplace 轉換 與 逆轉換 (配分 15 分)

   (1): $L\{\ t\ \ u(t-2)\ \}$ (2): $L\{(t-1)\, u(t-1)\}$ (3): $L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\}$

8. 使用 Laplace 轉換，求解 ODE (配分 10 分)

   $y' = 6y \quad y(-1) = 4$

9. 積分轉換 (配分 5 分)

$L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}$

- 求 y_h: Auxiliary equation: $m^2 + am + b = 0$ 根為: $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

  <1>相異實根: m_1, m_2 ODE 通解為: $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$

  <2>實數重根: m ODE 通解為: $y = (c_1 + c_2x)e^{mx}$

  <3>複數根 (共軛虛根): $\alpha \pm \omega i$ ODE 通解為: $y = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

- 未(待)定係數法 (Cauchy-Euler equation)

  令 $t = \ln x$ (以 t 取代 x)

  $xy' = D_t y$

  $x^2y'' = D_t(D_t - 1)y$

  $x^3y''' = D_t(D_t - 1)(D_t - 2)y$

- Laplace 轉換

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	t	$1/s^2$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
4	t^n $(n = 0, 1, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
5	t^a (a positive)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

First Shifting Theorem, s-Shifting	Laplace Transform of Derivatives
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ $e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$	$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Second Shifting Theorem; Time Shifting	**Examples for t-shifting by 1**
$\tilde{f}(t) = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a \\ f(t-a) & \text{if } t > a \end{cases}$ $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$	$1 \mapsto \frac{1}{s}$ $u(t-1) \mapsto e^{-s}\frac{1}{s}$ $t \mapsto \frac{1}{s^2}$ $(t-1)u(t-1) \mapsto e^{-s}\frac{1}{s^2}$ $t^2 \mapsto \frac{2}{s^3}$ $(t-1)^2u(t-1) \mapsto e^{-s}\frac{2}{s^3}$ $\sin t \mapsto \frac{1}{s^2+1}$ $\sin(t-1)u(t-1) \mapsto e^{-s}\frac{1}{s^2+1}$

Laplace Transform of Integral 積分轉換

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s), \qquad \text{thus} \qquad \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}$$