工程數學 Midterm #1 Oct 15, 2024

$\boxed{\text{計算小錯誤無部份給分}}$，請仔細作答

答案卷請務必在每一張寫上姓名、學號，沒寫不算分；若題目未說明，則求解 ODE:

註：*ODE的解*不需展開 $ln|\ |$

(10 分) 1. $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2$ ；求解 ODE

(10 分) 2. $dx + e^{3x}dy = 0$　求解 ODE

(10 分) 3. $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy$

4. $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ $has\ an\ integrating\ factor\ I(x)$, 註：必須寫下計算過程

(10 分) 4-1. Find $I(x)$

(10 分) 4-2. Solve the ODE

(15 分) 5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ $(let\ u(x) = \frac{y}{x})$

(15 分) 6. $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$

(12 分) 7. $y'' + 4y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 10,\ \ y'(0) = 0$

(8 分) 8. 寫出以下 ODE 的 order (階數), degree (次數), 本題為填空題，寫答案即可

		Order	Degree
8-1:	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$		
8-2:	$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx} - 4 = 0$		

公式表

求 y_h:

Auxiliary equation: $m^2 + am + b = 0$　　根為: $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

$\sqrt{a^2-4b}$ *解有三種可能*:

<1>相異實根: m_1, m_2

ODE 通解為: $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$

<2>實數重根: m

ODE 通解為: $y = (c_1 + c_2x)e^{mx}$

<3>複數根 (共軛虛根): $\alpha \pm \omega i$

ODE 通解為: $y = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

求 y_p:

Undetermined coefficients method (未定係數法):

R(x)	y_p 假設型
k	A
e^{ax}	Ae^{ax}
cos bx 或 sin bx	A cos bx + B sin bx
x^n	$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x^1 + A_0$
cx^n	$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x^1 + A_0$
x^ne^{nx}	$e^{nx}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x^1 + A_0)$
cx^ne^{nx}	$e^{nx}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x^1 + A_0)$
$x^n\cos bx$ 或 $x^n\sin bx$	$(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x^1 + A_0)\cos bx\ +$ $(B_nx^n + B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1x^1 + B_0)\sin bx$

註: a, b, c, k, n, A, B 為常數